状態のフラクタル次元とその応用

東京理科大学　理工学部　松岡隆志

序論

状態のフラクタル次元とは、Ohyaにより、Mandelbrotのフラクタル幾何学[1]とKolmogorovの確率変数のε-エントロピー[2]の概念をベースとして、一般の量子力学系（C*-力学系）の状態に対し導入された概念である[3,4,5]。これはエントロピーとは異なる、状態の複雑さを示す新しい指標であり、エントロピーでは区別できない状態が、状態のフラクタル次元を用いて特徴付けられるなど、その有用性が様々な系において調べられている[5,6,7]。ここでは、まず最初に、ε-エントロピー及びフラクタル幾何学の歴史を簡単に振り返り、Ohyaによる状態のフラクタル次元の、その複雑さの指標としての意味合いについて復習しておこう。

Kolmogorovは情報量（エントロピー）を用いて、確率空間上の確率変数（確率分布）及び距離空間上に各々εーエントロピーの概念を導入した[2,8]。前者は、Shannonがその通信理論の中で論じた"rate of generation of messages"という、ある与えられた精度の下での情報伝達速度の概念を発展させ定式化したものであり、後者は、距離空間上の集合に対しその複雑さ（情報量）を測る尺度として導入されたものである。

周知のように、Shannonが離散的な分布に対して定義したエントロピーを、その連続的な確率測度に対して直接拡張しようとすると、例えば、連続的な密度分布関数を用いて定義される微分エントロピーは負の値をとることがあるため、情報量としては意味をなさなくなってしまう。これに対し、相対エントロピーや相互エントロピーは一般の確率空間上でwell-definedであり、よって、一般の確率空間上における確率変数fのエントロピー$S(f)$は、二つの確率変数f,gの相互エントロピー$I(f,g)$を用いて、$S(f)=I(f,f)$（i.e., $f=g$）と与えられている。ただし、エントロピー$S(f)$は、確率変数fが連続的な密度関数を持てば常に発散する。こうした状況を踏まえ、Kolmogorovは、その情報量を有限な値で評価できる指標として、確率変数f

のεーエントロピーを定式化したのである[2]。

一方、距離空間上のεーエントロピーは、それを使うと距離空間上にユークリッド次元とは異る、非整数値をとりうる容量次元を定義することができる。非整数値をとる次元についての研究は、その発端を、PeanoがPeano曲線を用いて２次元とされる正方形の任意の点を一つの実数で表して見せたことに遡る。当然、このような数学的危機に見舞われた状況を打破する必要性が生じ、Cantor, Dedekind, Peano, Hausdorffといった数学者達の手によって、次元の概念が自己矛盾のない形で再構成された。こうした非整数値をとる次元としては、Hausdorff次元、容量次元等があある。ところで、KolmogorovとTihomirovは彼等の距離空間上における情報量の解析を通し、距離空間上にεーエントロピーを導入した[8]。この量を用いると、コンパクト距離空間上での通報の精度などを解析することができるが、ここには、その情報量を集合のεー被覆というものによって評価するという考え方が導入されている。このεー被覆という概念を通して、εーエントロピーと容量次元との関わりが明かになっているのである（その定義は次節で述べる）。また、次元論との直接の関係はないが、このεーエントロピーを関数空間上に応用することによって、Hilbertの第13問題がKolmogorovの定理という形で否定的な解決を見たのは、この概念の有効性を示す端的な一例である。

一見、状況を異にする二つの空間に導入された概念が、同じ名前を冠しているのは、Kolmogorovがその根本的なところで、エントロピーという概念の一般性、汎用性、共通性を看破していたからに他ならない。

さて、こうしたKolmogorovを中心とする情報理論の流れとは、全く別の視点から、Mandelbrotは、自然が示す形態の複雑さ（例えば、海岸線の地形や河川の形態、銀河系の分布など）の定量的な解析手法として、非整数値をとる次元に新しい視点を授け、その総称としてフラクタル次元という名前を考案した[1]。フラクタルとは、一部、半端、断面といったことを意味するMandelbrotの造語である。この彼の着眼により、応用などありえない抽象的な概念としか見なされなかったHausdorff次元や容量次元等の非整数値をとりうる次元は、自然の持つ複雑さを表す量だと解釈されるようになり、それ故、自然現象を適当な幾何学図形で近似することによって、自然現象の複雑さの解析や非線形な力学系の解析などに応用されている。ただし、このフラクタル次元は幾何学図形を介してのみ議論できるものであり、また、その値を厳密に求めることができるのはその幾何学図形が自己相似性を有するものに限られる。

以上のような研究の歴史を振り返ると、εーエントロピーとフラクタル次元の間には複雑さという概念を通して密接な関係があることが示唆されるが、Ohyaはこの点に着目し、これらの概念をより広範な科学の分野に適用していくために、一般の量子力学系（C*-力学系）にそれらを拡張し、組み合せることによって状態のフラクタル次元を導入した[3,4,5]。これは相空間上の測度や密度行列で表現されるような状態を特殊な場合として含む十分に一般的なものであり、それ故、通常の古典系や量子系の状態に対して、そのフラクタル次元による解析が可能になるのである。

例えば、von Neumannが導入した量子系の状態ρのエントロピー$S(\rho)$に対し、$S(\rho)<\infty$となる状態ρの任意のε近傍には、$S(\sigma)=\infty$となる状態σが存在することが知られているが、Kolmogorovの確率変数のεーエントロピーが、その無限大となるエントロピーの評価値であったように、状態ρのvon Neumannエントロピー$S(\rho)$は発散しても、そのフラクタル次元は有限となりうる可能性が示唆されている[4]。

また、月面のクレータや河川などの形状の複雑さの解析において、従来の幾何学図形のフラクタル次元に加え、状態のフラクタル次元を調べることで、その複雑さのより明確な意味付けや状態のフラクタル次元の有用性なども示されている[6]。

本稿では、Ohyaが定式化したC*ー力学系上の状態のフラクタル次元を詳しく解説し、その量子系への適用例として、状態のフラクタル次元によるIsingモデルの特徴付けに関する結果を紹介する[7]。

§１．幾何学図形のフラクタル次元

ここでは、幾何学図形に対して定義されたフラクタル次元として、スケーリング次元、容量次元を解説する。

<スケーリング次元>

ある基本図形により作られた対象 X（複雑な図形）を非常に粗い尺度（これを"1"とする。）で見たときの基本図形の個数を$N(1)$とし、尺度rで見たときのそれを$N(r)$とする。このとき X のスケーリング次元 $d_S(X)$は、

$$d_S(X) \equiv \log\frac{N(r)}{N(1)}/\log\frac{1}{r}$$

で定義される。これは、いろいろな実験を行うと

$$N(r) \approx r^{-d}N(1)$$

という関係式が多くでてくることが、経験的に確かめられていることによる[1]。

＜容量次元＞

集合 X を n 次元ユークリッド空間において、直径 ε のある凸集合で被覆することを考えよう。もし、集合 X を被覆するのに必要な凸集合の最小個数が $N(\varepsilon)$ であれば、X の容量次元は次のように定義される。

$$d_C(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}$$

上式において、$\log N(\varepsilon)$ は距離空間上の ε ーエントロピー[8]と呼ばれる。すなわち、容量次元は ε ーエントロピーを使って定義されており、情報量によってフラクタル次元を与えるものである。

次節以降で我々は、ε ーエントロピーを一般の量子力学系（C*ー力学系）上に拡張することによって、状態のフラクタル次元を定式化する。

§2. GQS上の相互エントロピー

General Quantum Systems (以下 GQS と略) は次の３つ組によって記述される。観測量の自然な拡張と見なし得るC*代数 $\mathcal{A}$（単位元を含む）、状態の集合として $\mathcal{A}$ 上の正規化された正値線形汎関数の全体 $\mathfrak{S}$ 、さらに系の力学変化（時間発展など）を論ずるために必要な強連続な１係数自己同型群 $\alpha(R)$ の３つである。この３つ組 $(\mathcal{A}, \mathfrak{S}, \alpha(R))$ で記述される GQSは、それ故C*ー力学系とも呼ばれる。

さて、このGQS上にフラクタル次元（あるいは、ε ーエントロピー）を導入するためには、GQS上で定式化された相互エントロピーが必要になるのだが、これは Ohya により[9,10]で与えられている。

いま、集合 $\mathfrak{S}$ は弱 * コンパクトな凸集合となっており、物理的にも重要な意味を持つ $\mathfrak{S}$ の凸部分集合がいくつか存在する。例えば、α ー不変な状態の全体 $I(\alpha)$ (i.e., $\phi \circ \alpha_t(\bullet) = \phi(\bullet)$)、ある定数 β における KMS 状態の全体 $K_\beta(\alpha)$（統計力学において平衡状態とされている Gibbs 状態は $K_\beta(\alpha)$ に含まれる。また、KMS 状態は α ー不変であることが示されており、この事実がKMS 状態を平衡状態の記述に採用できることの大きな理由の一つとなっている。）等である。以下、対象とする状態の集合を $\mathcal{S}$ として, (1) $\mathcal{S} = \mathfrak{S}$, (2) $\mathcal{S} = I(\alpha)$, (3) $\mathcal{S} = K_\beta(\alpha)$ の３つの場合を主に考えていくことにする。

$ex\,\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ の端点の全体の集合とすると、任意の状態 $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して $ex\,\mathcal{S}$ を準台として持つ極大測度 μ が存在して、

$$\varphi = \int_{\mathcal{S}} \omega d\mu \left(= \int_{(\alpha \mathcal{S})} \omega d\mu\right)$$

と表せる。この分解は、$\mathcal{S}$がChoquet単体でない限り一般に一意であるとは限らない。そこで、φの分解を与えるこのような測度の全体の集合を$M_\varphi(\mathcal{S})$と表す。この状態φの分解測度を用いて、状態φのエントロピーがOhyaにより定式化されており、その諸性質やそれを用いた情報伝送に関する議論[9,11,12]、以下で述べる相互エントロピーとの関係などが論じられるのであるが、ここではその詳細は割愛する。

それでは、GQS上に相互エントロピーを定式化していこう。ちなみに相互エントロピーは、2つの力学系においてその状態変化を論ずる際に、初期状態φの持つ情報量がどれだけ正確に終状態$\overline{\varphi}$に移ったかを示す量であり、通信理論(古典系あるいは量子系における)はもちろん、様々な物理系の力学的振舞いの定式化において本質的な役割を演じている。相互エントロピー導入のために、まずチャネルとOhyaにより[10,13]で与えられている合成状態の概念について説明する。

C*一力学系$(\mathcal{A},\mathfrak{S},\alpha(R))$, $(\overline{\mathcal{A}},\overline{\mathfrak{S}},\overline{\alpha}(R))$各々で記述される入力系と出力系を考える。状態の変換を与える$\mathfrak{S}$から$\overline{\mathfrak{S}}$への写像Λ^*が$\overline{\mathcal{A}}$から$\mathcal{A}$への完全正写像Λの共役写像であるときΛ^*をチャネルと呼ぶ。ここで、Λが完全正であるための必要十分条件は、

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_i^* \Lambda\left(A_i^* A_j\right) B_j \geq 0 \quad \text{for } \forall n \in N \quad \forall A_i \in \overline{\mathcal{A}} \quad \forall B_i \in \mathcal{A}$$

をΛが満たすことであるが、この条件は一見強そうに見えて、実は物理的な状態変化のほとんどが、このチャネルで記述できるのである。

初期状態φ $(\in \mathcal{S})$と終状態$\overline{\varphi}$ $(\in \overline{\mathcal{S}})$の間の相関を示す状態を合成状態と呼ぶ。すなわち、$\varphi$と$\overline{\varphi}$の合成状態$\Phi$はC*代数テンソル積$\mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}$上の状態で次の特性を満たすようなものである。

(C-1)　$\Phi\left(A \otimes \overline{I}\right) = \varphi(A)$ for $\forall A \in \mathcal{A}$

(C-2)　$\Phi\left(I \otimes \overline{A}\right) = \overline{\varphi}\left(\overline{A}\right)$ for $\forall \overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}$

(C-3)　Φは特別な場合として、古典系の合成状態(同時確率測度)を含む。

(C-4)　Φはφと$\overline{\varphi}$の各成分間の相関を示す。

初期状態φがチャネルΛ^*で終状態$\Lambda^*\varphi$へ変化したときその合成状態として、例えば、(C-1)、(C-2)を満たすものとしてはφと$\Lambda^*\varphi$の直積$\Phi_0(=\varphi \otimes \Lambda^*\varphi)$がある(これを自明な合成状態と呼ぶ)。しかし、これは(C-3)、(C-4)を満たさず、したがってφと$\Lambda^*\varphi$の間の相関を示すものではない(条件(C-1)、(C-2)のみを満足する状態を準合成状態と呼ぶ)。そこで(C-1)~(C-4)全てを満たす真の合

成状態を定式化するために、初期状態$\varphi \in \mathcal{S}$の端点分解を与える測度μを利用する。この測度μはφをその成分に分解するある仕方を表しており、分解されたφの成分がチャネルΛ^*によってどのように変化するかを明らかにするために、

$$\Phi_\mu^{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} \omega \otimes \Lambda^* \omega d\mu$$

とおくと、これは確かに(C-1)〜(C-4)全てを満たしており、真の合成状態と呼べるものである。（ここで、$\Phi_\mu^{\mathcal{S}}$と記したのは、その分解は集合$\mathcal{S}$の選び方に依存しているためであり、それ故、状態φの情報量をどのような基準系から伝送するかが考慮されるのである。）

初期状態$\varphi \in \mathcal{S}$、端点分解測度μ、及びチャネルΛ^*に関する相互エントロピーを次のように定義する。

$$I_\mu^{\mathcal{S}}(\varphi;\Lambda^*) = S(\Phi_\mu^{\mathcal{S}} | \Phi_0)$$

ここで、$S(\bullet|\bullet)$は２つの状態の Araki - Uhlmann の相対エントロピーである。（GQS上の相対エントロピーについては [14, 15, 16, 17,18]。）前述したように測度μは一意であるとは限らないので、このとき初期状態$\varphi \in \mathcal{S}$とチャネルΛ^*に関する相互エントロピーは次のように与えられる。

$$I^{\mathcal{S}}(\varphi;\Lambda^*) = \sup\left\{ I_\mu^{\mathcal{S}}(\varphi;\Lambda^*); \mu \in M_\varphi(\mathcal{S}) \right\}$$

ただし、$\mathcal{S}$がChoquet 単体であれば（i.e., μが一意であれば）

$$I^{\mathcal{S}}(\varphi;\Lambda^*) = I_\mu^{\mathcal{S}}(\varphi;\Lambda^*)$$

となり、また、測度μを固定しても同様である。以下、簡単のため、$\mathcal{S} = \mathfrak{S}$のときは、$\Phi_\mu$、$I_\mu(\varphi;\Lambda^*)$、$I(\varphi;\Lambda^*)$を使用する。

上述の定義は、かなり一般的なものであるので、通常の量子系に話を制限したとき、Ohyaの相互エントロピーがどのように表されるかを見ておこう。すなわち、$\mathcal{A} = B(\mathcal{H})$上で、任意の正則な状態$\varphi$が密度作用素$\rho$を用いて$\varphi(\bullet) = tr\rho\,\bullet$と表されるときである。いま、$\rho$の Schatten 分解を$\rho = \sum_n \lambda_n E_n$（$E_n$は１次元射影作用素）とすると、これは、全ての固有値λ_nが非縮退でない限り一般に一意であるとは限らない。それ故、真の合成状態はρの分解$\{E_n\}$（これをEと書く）に依存し、次のように表される。

$$\Phi_E(Q) = tr\sigma_E(Q), \quad \text{for } \forall Q \in \mathcal{A} \otimes \overline{\mathcal{A}}$$

$$\text{（ここで、}\sigma_E = \sum_n \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n\text{）}$$

このとき、初期状態ρとチャネルΛ^*に関する相互エントロピーは次で与えられる。

$$I(\rho;\Lambda^*)=\sup\{I_E(\rho;\Lambda^*);E=\{E_n\}\}$$

ただし、

$$I_E(\rho;\Lambda^*)=S(\sigma_E|\sigma_0)=tr\sigma_E(\log\sigma_E-\log\sigma_0)$$

（ここで、$\sigma_0=\rho\otimes\Lambda^*\rho$）

以上、Ohyaの相互エントロピーに関する研究は[3, 10, 19]に詳しい。

§3. GQS上のεーエントロピーとフラクタル次元

この節では、まず、簡単にKolmogorovのεーエントロピー[2]を復習し、GQS上におけるフラクタル次元の定式化について述べる[4,5]。

$(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$を確率空間、$M(\Omega)$を$\Omega$上の確率変数の集合、$\mu_{f\cdot g}$を確率変数$f,g\in M(\Omega)$の結合確率測度、及び$\mu_f\otimes\mu_g$をその直積測度とし、$I(f,g)$を確率変数$f,g\in M(\Omega)$の相互エントロピーとすれば、確率変数$f$の$\varepsilon$ーエントロピーは次で与えられる。

$$S(f;\varepsilon)=\inf\{I(f,g);g\in M_d(f,\varepsilon)\}$$

ただし、

$$M_d(f,\varepsilon)=\left\{g\in M(\Omega);\sqrt{\int_\Omega d(f,g)^2}\le\varepsilon\right\}$$

（ここで、$d(f,g)$はf,gの距離）

このεーエントロピーはその定式化から分かるように、確率変数fが持つ情報量（i.e., fのエントロピー$S(f)$）をfとεだけ距離が離れた確率変数gとの相互エントロピーによって評価するものである。

Kolmogorovのこのアイデアを GQS上に拡張する。$\mathfrak{C}$を全てのチャネルの集合とし、$\mathfrak{C}(\varphi;\varepsilon)$を$\|\varphi-\Lambda^*\varphi\|\le\varepsilon$を満たすチャネルの集合とすると、集合$\mathcal{S}$に関する状態$\varphi$の$\varepsilon$ーエントロピー$S^{\mathcal{S}}(\varphi;\varepsilon)$は、次のように定義される。

$$S^{\mathcal{S}}(\varphi;\varepsilon)=\inf\{J^{\mathcal{S}}(\varphi;\Lambda^*);\Lambda^*\in\mathfrak{C}(\varphi;\varepsilon)\}$$

ただし、

$$J^{\mathcal{S}}(\varphi;\Lambda^*)=\sup\{I^{\mathcal{S}}(\varphi;\Gamma^*);\Gamma^*\in\mathfrak{C},\Gamma^*\varphi=\Lambda^*\varphi\}.$$

であり、$J^{\mathcal{S}}(\varphi;\Lambda^*)$は極大相互エントロピーと呼ばれる。これは、終状態$\overline{\varphi}=\Lambda^*\varphi$

を与えるチャネルΛ^*はただ一つとは限らないため、$\overline{\varphi}$を与えるチャネルの中でその相互エントロピーが極大となるものをしてφから$\overline{\varphi}$へ移すことのできる情報量と定めたものである。ここでsupをとる理由は、チャネルを通して移すことのできる情報量は大きい方が好ましいからである（例えば、通信理論における通信路の効率など）。さらに、$J^{\mathcal{S}}(\varphi;\Lambda^*)$のinfで$\varepsilon$ーエントロピー$S^{\mathcal{S}}(\varphi;\varepsilon)$が与えられるのは、距離$\varepsilon$以内の状態に移すことができる情報量としてその最低限のエントロピーを保証するためである。

ところで、Kolmogorovのεーエントロピーには、極大相互エントロピーに対応する概念は示されておらず、それは直接相互エントロピーのinfをとることで定式化されている。さらに、その値はKolmogorov [2]やLin'kov[20]等によって与えられているが、特にLin'kovは、Kolmogorovが[2]で証明なしに示した結果をより一般的な場合において厳密に証明して見せてはいるものの、その証明は微分エントロピーを介したもので、序論でも述べたように微分エントロピーの情報量としての不自然さ故か、そのεーエントロピーの評価はもう一つはっきりしない。また、εがある範囲より大きいところでは、直接infをとるため、εーエントロピーは0となることを示すこともできる。それに対し、Ohyaのεーエントロピーは、確率空間上においては、測度μをチャネル（例えば、Baker流のチャネル[21]）によって変換し、極大相互エントロピーを介すことによって、その値が厳密に計算される。加えて、その漸近的な評価値のみを比べると二つのεーエントロピーは一致する。以上のような結果から、Kolmogorovの定式化の是非をはっきり問うことはできないものの、少なくともεーエントロピーの定式化はOhyaによるものが、その情報量としての意味合いから考えても自然であることが示されている[22]。

$S^{\mathcal{S}}(\varphi;\varepsilon)$を用いて、状態$\varphi$ $(\in\mathcal{S})$のフラクタル次元を次で与える[4,5]。

定義1（容量次元）：

$$d_C^{\mathcal{S}}(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S^{\mathcal{S}}(\varphi;\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}$$

定義2（オーダεの情報次元）：

$$d_I^{\mathcal{S}}(\varphi;\varepsilon)=\frac{S^{\mathcal{S}}(\varphi;\varepsilon)}{I(\varepsilon)}$$

（ここで、$I(\varepsilon)$は$\lim_{\varepsilon\to 0}d_I^{\mathcal{S}}(\varphi;\varepsilon)=1$を満たす規格化定数）

以下、簡単のため、$\mathcal{S}=\mathfrak{S}$のとき$d_C(\varphi)=d_C^{\mathfrak{S}}(\varphi)$と書く。また、容量次元に対しては、次が成立する[4]。

定理3.1. 状態φ ($\in\mathcal{S}$)の全ての分解測度μが、直交測度で、かつ離散的な台を持ち、さらにエントロピー$S^{\mathcal{S}}(\varphi)$が有界であれば、$d_C^{\mathcal{S}}(\varphi)=0$。(特に、密度作用素$\rho$に対して、$S(\rho)$が有界のとき、$d_C(\rho)=0$。)

定理3.1.は、$S(\rho)$は発散しても$d_C(\rho)$は有界になり得る可能性を示唆している。

以上、見てきたように、Ohyaのフラクタル次元は、通常の古典系、及び量子系を含み、エントロピーとは異なる系のある種の複雑さの指標と見なすことができる。また、状態に対応する確率分布が与えられれば、そのフラクタル次元を直接計算できるので、様々な系への適用が可能なのである。例えば、四種類の文字の記号列において各々の文字の生起確率を考えたとき、二つの確率分布P、Qのエントロピーは等しくても、そのフラクタル次元は異る例が計算結果から示されている[5]。これはエントロピーでは区別することができない状態が、状態のフラクタル次元を用いれば分類可能であることを意味しており、四種類の塩基によって構成されるDNAの遺伝子解析に状態のフラクタル次元を応用することなどが考えられている。

次節より、状態のフラクタル次元を量子系のIsingモデルに適用し、現在まで得られている結果[7]について説明する。

§4. 量子スピン系の数学的定式化

統計熱力学において、相転移の問題などを扱う際に、それを厳密に論じることができるのはいくつかのモデルに限られており、その代表的なものの一つが格子系のIsingモデルである。このIsingモデルは数学的には局所C*代数を用いて記述される[19, 23, 24,25]。まず、簡単にその数学的定式化を復習する。

γ次元格子Z^γを考えよう。各格子点$x\in Z^\gamma$に有限次元Hilbert空間$\mathcal{H}_x=\mathcal{H}_0$を対応させると、格子点$x$に限定された観測量の集合$\mathcal{A}_x$は$\mathcal{A}_x=B(\mathcal{H}_x)$で与えられる。さらに、任意の有限領域$\Delta\subset Z^\gamma$上の局所的な観測量の集合$\mathcal{A}_\Delta$は、

$$\mathcal{A}_\Delta=\bigotimes_{x\in\Delta}\mathcal{A}_x$$

で定義され、これをΔに関する局所C*代数という。いま、Z^γの有限集合の全体を$\mathfrak{F}(Z^\gamma)$とすると、集合族$\{\mathcal{A}_\Delta;\Delta\in\mathfrak{F}(Z^\gamma)\}$において、$\Delta_1\subset\Delta_2$のとき、$\mathcal{A}_{\Delta_1}$から

$\mathcal{A}_{\Delta_2}$へのうめ込み（i.e., $A \otimes I_{\{k\in\Delta_2\,;\,k\notin\Delta_1\}}$,（$\forall A \in \mathcal{A}_{\Delta_1}$、$I_\Delta$は$\Delta$の単位元））が存在して、さらに、$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$のとき、$\mathcal{A}_{\Delta_1}$と$\mathcal{A}_{\Delta_1} \otimes I_{\Delta_2}$は同一視できる。よって、$\{\mathcal{A}_\Delta ; \Delta \in \mathfrak{F}(Z^\nu)\}$は増大族と見なすことができ、$\mathcal{A}_\infty = \cup\{\mathcal{A}_\Delta ; \Delta \in \mathfrak{F}(Z^\nu)\}$とおくと、これはノルム代数となる。このノルムで$\mathcal{A}_\infty$を完備化したもの

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}_\infty}$$

を局所C*代数（準局所C*代数）という。$\mathcal{A}$は全ての$\mathcal{A}_\Delta$をC*部分代数として含む最小のC*代数である。

任意の$x, a \in Z^\nu$に対して、$\mathcal{H}_a$から$\mathcal{H}_{a+x}$へのユニタリー写像を（1）$U_a(0) = I_a$、（2）$U_a(x+y) = U_{a+y}(x) U_a(y)$ $(\forall y \in Z^\nu)$と定め、$U_\Delta(x) = \bigotimes_{a\in\Delta} U_a(x)$とおく。このとき、

$$\tau_x(A) = U_\Delta(x) A U_{\Delta+x}(-x) \quad (\forall A \in \mathcal{A}_\Delta)$$

とおくと、これは$\mathcal{A}_\Delta$の元を$\mathcal{A}_{\Delta+x}$へ移す（i.e., xだけΔをシフトさせる）$\mathcal{A}$上の自己同型写像である。

さて、写像$\Phi : \Delta \in \mathfrak{F}(Z^\nu) \mapsto \Phi(\Delta) \in \mathcal{A}_\Delta$が$\Phi(\Delta) = \Phi(\Delta)^*$を満たすき、これは相互作用ポテンシャルと呼ばれるが、このΦを用いて、任意の有限領域Δに対する局所ハミルトニアン$H(\Delta)$を次のようにつくることができる。

$$H(\Delta) = \sum_{X\subset\Delta} \Phi(X)$$

以下の議論では、ΦはZ^ν-不変（i.e., $\tau_x(\Phi(X)) = \Phi(X+x)$）を仮定する。

いま、局所C*代数$\mathcal{A}$上の状態φの$\mathcal{A}_\Delta$への制限φ_Δを考えると、φにおける$\mathcal{A}_\Delta$上のエネルギー、エントロピーはそれぞれ次の形で与えられる。

$$E_\Delta(\varphi) = tr_\Delta(\rho_\Delta H(\Delta)) \qquad S_\Delta(\varphi) = tr_\Delta(\rho_\Delta \log \rho_\Delta)$$

ここで、ρ_Δは$\mathcal{A}_\Delta$上のtr_Δに関するφ_Δの密度行列である。

また、有限領域Δの格子系の時間発展を表す$\mathcal{A}_\Delta$の1係数自己同型群$\alpha^\Delta(R)$は

$$\alpha_t^\Delta(A) = \exp(itH(\Delta)) A \exp(-itH(\Delta)) \quad (\forall A \in \mathcal{A}_\Delta)$$

で与えられる。

以上、簡単に格子系の数学的定式化を振り返ってきたが、通常、相転移などの問題は、まず有限領域Δで議論を行い、その熱力学的極限（いわゆる、van Hove 極限）$\Delta \to \infty$を取ることによって考察される。それゆえ、議論の大部分を有限次元の$B(\mathcal{H})$上で扱えるという利点がある。例えば、エントロピー$S_\Delta(\varphi)$の熱力学的極限

に関して次の定理が成立する[26]。

定理4.1. 局所C*代数$\mathcal{A}$上の状態φがZ^{γ}-不変であるとすると、$S_{\Delta}(\varphi)$の熱力学的極限$s(\varphi)=\lim_{\Delta\to\infty}|\Delta|^{-1}S_{\Delta}(\varphi)$（ここで、$|\Delta|$は$\Delta$の体積）が存在して、

$$s(\varphi)=\inf\left\{|\Delta(a)|^{-1}S_{\Delta(a)}(\varphi);a\in Z_{+}^{\gamma}\right\}$$

（ここで、$\Delta(a)=\left\{x\in Z^{\gamma};0\le x_i\le a_i,i=1,2,\dots,\gamma\right\}$）

（この定理の証明は、有限次元Hilbert空間上のエントロピーの強劣加法性によって与えられる[19, 24, 25, 26]。）

さて、一般に、状態φの時間発展が1係数群$\{\alpha_t;t\in R\}$により与えられるとき、エントロピーは変化しない（i.e., $S(\varphi)=S(\varphi\circ\alpha_t)$）。では、フラクタル次元についてはどうであろうか。一般に、$d_C^{\mathcal{S}}(\varphi)$と$d_C^{\mathcal{S}}(\varphi\circ\alpha_t)$の間に等号は成立せず、もし不等号や何らかの単調性が成り立てば、系のカオティックな挙動をエントロピーの代りにフラクタル次元を用いて議論できる可能性がでてくる。また、特に群$\{\alpha_t;t\in R\}$を系の時間発展と限らなければ、これはエントロピーでは区別できない状態をフラクタル次元では区別できるということであり、力学系$(\mathcal{A},\mathfrak{S},\alpha(R))$の何らかの意味での分類がフラクタル次元を用いて可能であることになる。

そこで、以上のような系の特徴付けが、量子スピン系においてそのフラクタル次元を用いて可能だろうか。次節で、1次元格子系のスピン$1/2$のIsingモデルにおけるフラクタル次元について解説する。

§ 5. 1次元 Ising モデルのフラクタル次元 [7]

この節では1次元の格子系を考え、各格子のHilbert空間の次元は2とする。このとき、スピン$1/2$のIsingモデルとは、その局所ハミルトニアン$H(\Delta)$が以下のように与えられる格子系である。1次元のi番目の格子のx, y, z軸のPauli行列σ_i^x,σ_i^y, σ_i^zはそれぞれ、

$$\sigma_i^x=\sigma^x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\quad \sigma_i^y=\sigma^y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\quad \sigma_i^z=\sigma^z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

であるが、そのとき領域$\Delta_n=[-n,n]$の局所ハミルトニアン$H(\Delta_n)$は、

$$H(\Delta_n)=-J\sum_{i=-n}^{n}\sigma_i^z\bullet\sigma_{i+1}^z\left(-k\sum_{i=-n}^{n}\sigma_i^z\right)$$

と与えられる。ここで、$\sigma_i^z \bullet \sigma_{i+1}^z = \sigma_i^z \otimes \sigma_{i+1}^z \otimes I_{\Delta_n / \{i,i+1\}}$ である。さらに、$\sigma_{n+1}^z = \sigma_{-n}^z$ とすることによって、ここでは格子数$(2n+1)$個の閉じた系を考える。また、簡単のため$k=0$として考えることも多いので右辺の第2項は括弧で括ってある。

さて、領域Δ_nのチャネルを$\Lambda_{\Delta_n}^* = \bigotimes_{i \in \Delta_n} \Lambda_i^*$（ここで、任意の$i$に対して$\Lambda_i^* = \Lambda_0^*$）と定義すると、領域$\Delta_n$の状態のフラクタル次元は次で与えられる（ただし、$\mathcal{S} = \mathfrak{S}$）。

$$d_{C_{\Delta_n}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{S_{\Delta_n}(\varphi;\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$d_{I_{\Delta_n}}(\varphi;\varepsilon) = \frac{S_{\Delta_n}(\varphi;\varepsilon)}{I_{\Delta_n}(\varepsilon)}$$

このとき、次の補題が簡単に示せる。

補題5.1． それぞれ任意の$\varepsilon > 0$、$n < \infty$が独立に与えられるとき、任意の状態$\varphi \in \mathfrak{S}$に対して、

$$d_{C_{\Delta_n}}(\varphi) = 0$$

さて、一般に局所C*代数$\mathcal{A}$上の状態φのエントロピー$S(\varphi)$は、多くの場合無限大となるが、量子スピン系においては、定理4.1.で示されるように格子1個当りの平均エントロピー$s(\varphi)$が存在し、この$s(\varphi)$を用いて系の特徴付けがなされている（例えば、α-不変な状態φがKMS状態であることの必要十分条件は、平均エントロピー$s(\varphi)$を用いて与えられる）。そこで、同様に状態φのフラクタル次元についてもその熱力学的極限の存在が示せれば、フラクタル次元による系の何らかの特徴付けの可能性も考えられる。

問題5.2． $\varepsilon = \frac{1}{|\Delta_n|}$としたとき、

$$d_C(\varphi) = \lim_{\Delta_n \to \infty} \frac{S_{\Delta_n}\left(\varphi;\frac{1}{|\Delta_n|}\right)}{\log|\Delta_n|}$$

がどんな条件のものとで存在するか。

この存在証明については、現在筆者達の間で検討中である。

次に、領域Δ_nにおける情報次元$d_{I_{\Delta_n}}(\varphi;\varepsilon)$について考えよう。前述したように、エントロピーはある１係数群$\{\alpha_t^{\Delta_n};t\in R\}$に対して、$S_{\Delta_n}(\varphi)=S_{\Delta_n}(\varphi\circ\alpha_t)$であるが、それでは$d_{I_{\Delta_n}}(\varphi;\varepsilon)$と$d_{I_{\Delta_n}}(\varphi\circ\alpha_t;\varepsilon)$についてはどうであろうか。

ところで、各格子間に何の相互作用も働いていないとすると（i.e., 領域Δ_nの密度行列ρ_{Δ_n}が$\rho_{\Delta_n}=\bigotimes_{i\in\Delta_n}\rho_i$で与えられるとき）、次の補題が成立する。

補題５.３.：　$\rho_{\Delta_n}=\bigotimes_{i\in\Delta_n}\rho_i$のとき、任意の$n<\infty$に対して、

$$I_{\Delta_n}(\varphi;\Lambda^*)=I(\rho_{\Delta_n};\Lambda^*_{\Delta_n})=\sum_{i\in\Delta_n}I(\rho_i;\Lambda^*_0)$$

そこで、我々は一格子iについて$d_I(\rho_i;\varepsilon)$、$d_I(\rho_i\circ\alpha_t^i;\varepsilon)$を考察することから始め、その結果を上の補題等を用いて領域Δ_nに拡張するというステップで考えていく。本稿では、一格子のフラクタル次元についてのみ、その結果を紹介する。領域Δ_n上での議論や熱力学的極限の存在等については、別の論文で詳しく論じる予定である。

いま、一格子の Hilbert 空間$\mathcal{H}_0$が$\mathcal{H}_0=C^2$のとき、状態$\mathfrak{S}(\mathcal{H}_0)$上のチャネル$\Lambda_0^*(\bullet)$は一般に次のような形で表現できる[27]。

「チャネル$\Lambda_0^*(\bullet)$のKraus 表現」；

$$\Lambda_0^*(\bullet)=\sum_{i=1}^{4}W_i\bullet W_i^*$$

ここで、$\{|x_1\rangle,|x_2\rangle\}$をハミルトニアン$H(\Delta_0)$の固有ベクトルとしたとき、$W_i$は、

$$W_i=a_i^1|x_1\rangle\langle x_1|+a_i^2|x_1\rangle\langle x_2|+a_i^3|x_2\rangle\langle x_1|+a_i^4|x_2\rangle\langle x_2|\quad(a_i^j\in C)$$

である。このとき、

$$\Lambda_0^*(\bullet)\text{がチャネル}\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{i=1}^{4}W_iW_i^*=I$$

上のチャネルは最も一般的なものであるが、以下我々は Pauli 行列を用いて特徴付けられるチャネルに限って話を進める。すなわち、我々のチャネルは次のように与えられる。

「我々が使用するチャネル（Pauli チャネルと呼ぶ）」；

$$\Lambda_0^*(\bullet)=\sum_{i=1}^{4}W_i\bullet W_i^*$$

ここで、W_iは、

$$W_i = a_i^1\sigma^x + a_i^2\sigma^y + a_i^3\sigma^z + a_i^4 I \qquad \left(a_i^j \in R\right)$$

このとき、$\Lambda_0^*(\bullet)$がチャネルとなるための必要十分条件は次で与えられる。

$$\sum_{i=1}^{4} W_i W_i^* = I \quad \Leftrightarrow \quad (1) \quad \sum_{i=1}^{4}\left(a_i^1\right)^2 + \left(a_i^2\right)^2 + \left(a_i^3\right)^2 + \left(a_i^4\right)^2 = 1$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{4} a_i^1 a_i^4 = \sum_{i=1}^{4} a_i^2 a_i^4 = \sum_{i=1}^{4} a_i^3 a_i^4 = 0$$

さて、1係数群$\alpha(R)$として、回転$\alpha_\theta(\bullet) = R(\theta) \bullet R(\theta)^*$（ここで$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$）を考えると、次の定理が成立する[7]。

定理5.4.　いま、与えられた状態ρ_0が、

$$\rho_0 = \lambda_1 |x_1\rangle\langle x_1| + \lambda_2 |x_2\rangle\langle x_2|$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \mu \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \mu \quad (0 < \mu < 0.5)$$

$$\left\{ |x_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ |x_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} : \mathcal{H}_0 \text{のC.O.N.S.}$$

と、Schatten分解できるものとする。このとき、Pauliチャネルがある$\delta > 0$に対して、条件$\left| \sum_{i=1}^{4} a_i^1 a_i^3 \right| \geq \delta$を満たすとすると、状態$\rho_0$に対して、次の三つの不等式が成立する。：

任意の$\theta\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$、任意の$\varepsilon(4\mu\delta < \varepsilon < 2\mu)$、$\cos\theta_\delta = \sqrt{1 - 16\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^2 \delta^2}$

を満たす任意のθ_δに対して、

（1）$\cos 2\theta$あるいは$\sin 2\theta > \cos\theta_\delta$のとき、

$$d_I(\rho_0;\varepsilon) > d_I(\rho_0 \circ \alpha_\theta;\varepsilon)$$

（2）$\cos 2\theta$あるいは$\sin 2\theta = \cos\theta_\delta$のとき、

$$d_I(\rho_0;\varepsilon) = d_I(\rho_0 \circ \alpha_\theta;\varepsilon)$$

（3）$\cos 2\theta$あるいは$\sin 2\theta < \cos\theta_\delta$のとき、

$$d_I(\rho_0;\varepsilon) < d_I(\rho_0 \circ \alpha_\theta;\varepsilon)$$

この定理の証明には少し複雑な計算を要するが、（1）$J(\rho_0;\Lambda_0^*) = I(\rho_0;\Lambda_0^*)$、（2）$\Lambda_0^* \in \mathfrak{C}(\rho_0;\varepsilon)$の範囲で、$I(\rho_0;\Lambda_0^*)$は$\varepsilon$の関数として$I(\rho_0;\varepsilon)$と表され、さらにそれは単調減少となる、ことから示される。また、定理5.4.の条件の下で、状

態のフラクタル次元は厳密に計算することができる。そのいくつかの計算結果を以下に示しておこう。

(1) $\mu = 0.25,\ \varepsilon = 0.3,\ \delta = 0.2,\ \theta = \dfrac{\pi}{16}$のとき、

$$\cos 2\theta > \cos\theta_\delta$$

$$d_I(\rho_0;\varepsilon) = 0.3486029 > d_I(\rho_0 \circ \alpha_\theta;\varepsilon) = 0.1774656$$

(2) $\mu = 0.25,\ \varepsilon = 0.3,\ \delta = 0.2,\ \theta = \dfrac{\pi}{8}$のとき、

$$\cos 2\theta < \cos\theta_\delta$$

$$d_I(\rho_0;\varepsilon) = 0.3486029 < d_I(\rho_0 \circ \alpha_\theta;\varepsilon) = 0.3884780$$

(3) $\mu = 0.1,\ \varepsilon = 0.05,\ \delta = 0.05,\ \theta = \dfrac{\pi}{16}$のとき、

$$\cos 2\theta > \cos\theta_\delta$$

$$d_I(\rho_0;\varepsilon) = 0.4928831 > d_I(\rho_0 \circ \alpha_\theta;\varepsilon) = 0.4893434$$

(4) $\mu = 0.1,\ \varepsilon = 0.05,\ \delta = 0.05,\ \theta = \dfrac{\pi}{8}$のとき、

$$\cos 2\theta < \cos\theta_\delta$$

$$d_I(\rho_0;\varepsilon) = 0.4928831 < d_I(\rho_0 \circ \alpha_\theta;\varepsilon) = 0.5981584$$

表１

定理５.4.や表１の計算結果から、我々は、エントロピーでは区別できない状態ρ_0と$\rho_0 \circ \alpha_\theta$の違いを、フラクタル次元を用いることによって特徴付けることができた。特に、この定理５.４.の結果は、一種の相転移を表しているとも見てとれるが、その物理的な意味等を明らかにしていくことは今後の課題である。さて、この結果を領域Δ_nに拡張することを考えると、今度は自己同型群$\alpha^{\Delta_n}(R)$として、系の時間発展を与える$\alpha_t^{\Delta_n}(\bullet) = \exp(itH(\Delta_n)) \bullet \exp(-itH(\Delta_n))$に対するフラクタル次元$d_{I_{\Delta_n}}(\varphi \circ \alpha_t;\varepsilon)$を計算することができるが、このとき状態$\varphi_{\Delta_n}$のC.O.N.S.を回転させることによって、エントロピーでは論じることが出来ない$\alpha_t^{\Delta_n}(\bullet)$による系の時間発展の方向性に、フラクタル次元を用いて何等かの特徴付けが行える可能性が生じてくる。これは初期状態の違いが、その後の系の時間発展に影響を及ぼすということでもあり、系のカオティックな挙動との関連などについても何等かの議論が可能になると思われる。さらに、前述した熱力学的極限の存在を明らかにすることは重要な課題である。

参考文献

[1] B. B. Mandelbrot ; "The Fractal Geometry of Nature", W. H. Freemann and Cmpany, San Francisco (1982).

[2] A. N. Kolmogorov ; "Theory of tansmission of information", Amer. Math. Soc. Translation, Ser. 2, 33, pp.291-321(1963).

[3] M. Ohya ; "Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes", Rep. Math. Phys. 27, pp. 19-47 (1989).

[4] M. Ohya ; "Fractal dimensions of general quantum states", Proc. Symp. Appl. Func. Anal. 11, pp. 45- (1989).

[5] M. Ohya ; "Fractal dimensions of states", in Quantum Probability and Related Topics VI (World Scientific, Singapore) pp. 359-369 (1991).

[6] 大矢雅則、松岡隆志 ; "状態のフラクタル次元を用いたクレータ及び河川の複雑さの解析", 電子情報通信学会論文誌に投稿中.

[7] M. Ohya and T. Matsuoka ; "Fractal dimsnsions of states and its application to Ising model" to appear in Rep. Math. Phy.

[8] A.N. Kolmogorov and V.M. Tihomirov ; "ε-entoropy and ε-capacity of sets in function space", Amer. Math. Soc. Translation, Ser. 2, 17, pp. 277-364 (1961).

[9] M. Ohya ; "Entropy transmission in C*-dynamical systems", J. Math. Anal. Appl. 100, pp. 222-235 (1984).

[10] M. Ohya ; " On compound state and mutual information in quantum information theory", IEEE Trans. Imformation Theory, 29, pp. 770-777 (1983).

[11] M. Ohya and T. Matsuoka ; "Cnotinuity of entropy and mutual entropy in C*-dynamical systems", J. Math. Phys. 27, pp. 2076-2079 (1986).

[12] N. Muraki ; "Remarks on continuity of entropy of states on C*-dynamical systems", J. Math. Phys. 32, pp. 1796-1798 (1991).

[13] M. Ohya ; "Note on quantum probability", L. Nuovo Cimeto. 38, pp.402-406 (1983).

[14] H. Umegaki ; "Conditional sxpectations in an operator algebra IV (entropy and information)", Kodai Math. Sem. Rep. 14, pp. 59-85 (1962).

[15] G. Lindblad ; "Entropy, information and quantum measurement", Commun. Math. Phys. 33, pp. 305-322 (1973).

[16] H. Araki ; "Relative entropy for states of von Neumann algebras", Publ. RIMS Kyoto Univ. 11, pp.809-833 (1976).

[17] A. Uhlmann ; "Relative entropy and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity in an interpolation theory", Commun. Math. Phys. 54, pp. 21-32 (1977).

[18] M. J. Donald ; "On the relative entropy", Commun. Math. Phys.105, pp. 13-34 (1985).

[19] M. Ohya and D. Petz ; "Quantum Entropy and Its Use", Springer, New York, Berlin, Heidelberg (1993).

[20] Yu. N. Lin'kov ; "Evaluation of ε-entoropy of random variables for small ε", Problems Inform. Transmis. 1, pp. 12-18 (1965).

[21] C. R. Baker ; "Capacity of the Gaussian channel without feedback", Inform. and Control, 37, pp. 70-89 (1978).

[22] M. Ohya, T. Matsuoka and K. Inoue ; " New approach to ε -entropy and comparison with Kolmogorov's ε -entropy", preprint.

[23] O. Bratteli and D. W. Robinson ; "Operaror algebras and quantum statistical mechanics II", Springer, New York, Berlin, Heidelberg (1981).

[24] R. B. Israel ; "Convexity in the theory of lattice gases", Princeton University Press, Princeton (1979).

[25] D. Ruelle ; "Statistical Mechanics. Rigorous Results", Benjamin, New York-Amsteldam (1969).

[26] O. E. Landford and D. W. Robinson ; "Mean entropy of states in quantum statistical mechanics", J. Math. Phys. 9, pp. 1120-1125 (1968).

[27] K. Kraus ; "States, Effects, and Operations", Springer, New York, Berlin, Heidelberg (1983).